Petre Năchilă

Ora de matematică

Clasa a VIII-a

Editura NOMINATRIX

Cuprins

ALGEBRĂ

CAPITOLUL 1

Intervale de numere reale. Inecuații în $\mathbb{R}$

1.1. Mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor lor

A. Mulțimea numerelor naturale $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$; $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$.

Mulțimea numerelor întregi $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$; $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$.

Mulțimea numerelor raționale $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \middle| a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*\right\}$; $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$.

Avem:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

Observații:

1) $\mathbb{N}$ este stabilă în raport cu adunarea şi înmulțirea numerelor naturale (suma şi produsul a două numere naturale este număr natural).

2) Mulțimea $\mathbb{N}$ nu este stabilă în raport cu scăderea şi împărțirea.

Exemplu: 3 şi 5 $\in \mathbb{N}$, dar $3 - 5 \notin \mathbb{N}$, $3 : 5 \notin \mathbb{N}$.

3) $\mathbb{Z}$ este stabilă în raport cu adunarea, scăderea şi înmulțirea.

4) $\mathbb{Z}$ nu este stabilă în raport cu împărțirea.

5) $\mathbb{Q}$ este stabilă în raport cu adunarea, scăderea, înmulțirea şi împărțirea.

6) Pentru orice număr rațional r există o fracție ireductibilă $\frac{a}{b}$ (unică) cu $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $r = \frac{a}{b}$.

7) Orice număr rațional poate fi reprezentat prin fracții ordinare echivalente sau printr-o fracție zecimală finită sau printr-o fracție zecimală periodică (simplă sau mixtă).

8) Vom lucra cu perioada diferită de 0 şi de 9. Astfel, avem:

$$8,(0) = 8;\ 3,46(0) = 3,46;\ -5,(9) = -5\frac{9}{9} = -6.$$

9) Transformările fracțiilor ordinare în fracții zecimale au loc prin algoritmul de împărțire: $\frac{8}{25} = 8 : 25 = 0{,}32$; $-\frac{2}{3} = -0{,}(6)$; $\frac{47}{30} = 1{,}5(6)$.

10) Transformările fracțiilor periodice în fracții ordinare:

I. fracție zecimală neperiodică: $\overline{a_0, a_1a_2...a_n} = a_0 \frac{\overline{a_1a_2...a_n}}{1\underbrace{00...00}_{n \text{ cifre de } 0}}$;

II. fracție zecimală periodică simplă: $\overline{a_0, (a_1a_2...a_n)} = a_0 \frac{\overline{a_1a_2...a_n}}{\underbrace{99...9}_{n \text{ cifre}}}$;

III. fracție zecimală periodică mixtă:

$$\overline{a_0, a_1a_2...a_m(a_{m+1}...a_{m+p})} = a_0 \frac{\overline{a_1a_2...a_{m+p}} - \overline{a_1a_2...a_m}}{\underbrace{99...9}_{p \text{ cifre}}\underbrace{00...0}_{m \text{ cifre}}}.$$

11) Orice număr irațional este reprezentat printr-o fracție zecimală infinită şi neperiodică.

Exemple: 2,31311311131111…; $\sqrt{p}$, p număr prim.

12) Mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ este reuniunea dintre $\mathbb{Q}$ şi mulțimea numerelor iraționale.

Teoremă. Fie numărul rațional $\frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$. Numărul se transformă în:

I. fracție zecimală finită dacă $b = 2^m \cdot 5^n$, $m, n \in \mathbb{N}$;

II. fracție zecimală periodică simplă dacă b conține în descompunerea sa numai factori primi diferiți de 2 şi 5;

III. fracție zecimală periodică mixtă dacă b conține în descompunerea sa cel puțin unul din factorii 2 sau 5, dar şi cel puțin un factor prim diferiți de 2 şi 5, partea neperiodică având un număr de cifre egal cu cel mai mare dintre exponenții lui 2 şi 5.

B. Definiție. Spunem că numărul real a este mai mare decât numărul real b dacă există numărul real $c > 0$, astfel încât $a = b + c$. Scriem $a > b$. Scriem echivalent $b < a$. Avem $a \geq b \Leftrightarrow$ există $c \geq 0$, astfel încât $a = b + c$.

Proprietățile relației de ordine:

a) *reflexivitatea:* $a \geq a$, $\forall\ a \in \mathbb{R}$;

b) *antisimetria:* $a \geq b$, $b \geq a \Rightarrow a = b$;

c) *tranzitivitatea:* $a \geq b$, $b \geq c \Rightarrow a \geq c$, $\forall\ a, b, c \in \mathbb{R}$.

Relația de ordine este compatibilă cu operațiile de adunare şi înmulțire, adică:

a) $a \geq b$, $c \geq d \Rightarrow a + c \geq b + d$, $\forall\ c \in \mathbb{R}$;

b) $a \geq b$, $c > 0 \Rightarrow ac \geq bc$; $a \geq b$, $c < 0 \Rightarrow ac \leq bc$;

c) $a \geq b \geq 0$, $c \geq d \geq 0 \Rightarrow ac \geq bd$.

Relația „$\leq$” este relația de ordine compatibilă cu adunarea şi înmulțirea numerelor reale.

Relațiile „>” şi „<” nu sunt relații de ordine (sunt doar tranzitive).

Definiții. Partea întreagă a unui număr real x (notată cu $[x]$) este cel mai mare număr întreg cel mult egal cu x: $[x] = n \in \mathbb{Z}$ astfel încât $n \leq x < n + 1$.

Exemple: $[2, 43] = 2$; $[-2, 43] = -3$.

Partea fracționară a numărului real x este $\{x\} = x - [x]$.

Proprietățile ale părții întregi a unui număr real:

a) $[x] \leq x < [x] + 1, \forall x \in \mathbb{R}$;

b) $x - 1 < [x] \leq x, \forall x \in \mathbb{R}$;

c) $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$;

d) $[x + m] = [x] + m, \forall x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{Z}$;

e) $[x] + [y] \leq [x + y] \leq [x] + [y] + 1, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Proprietățile ale părții fracționare a unui număr real:

a) $0 \leq \{x\} < 1, \forall x \in \mathbb{R}$;

b) $\{x\} = x \Leftrightarrow x \in (0, 1)$;

c) $\{x\} = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{Z}$;

d) $\{x + m\} = \{x\}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{Z}$.

Definiții. 1. Fie numărul real pozitiv $a = a_0,a_1a_2\ldots a_n\ldots$. Aproximările sale cu n zecimale sunt numere raționale, astfel:

- prin lipsă: $a'_n = a_0,a_1a_2\ldots a_n$;
- prin adaos: $a''_n = a_0,a_1a_2\ldots a_n + 10^{-n}$.

Avem $a'_n \leq a < a''_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

2. Fie numărul real negativ $a = a_0,a_1a_2\ldots a_n\ldots$. Aproximările sale cu n zecimale sunt numere raționale, astfel:

- prin lipsă: $a'_n = a_0,a_1a_2\ldots a_n - 10^{-n}$;
- prin adaos: $a''_n = a_0,a_1a_2\ldots a_n$.

Avem $a'_n < a \leq a''_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

C. Definiție. Modulul numărului real a (sau valoarea absolută a lui a) este:

$$|a| = \begin{cases} -a, & a < 0 \\ 0, & a = 0 \\ a, & a > 0 \end{cases}.$$

Avem $|a| = \begin{cases} -a, & a \leq 0 \\ a, & a > 0 \end{cases} = \begin{cases} -a, & a < 0 \\ a, & a \geq 0 \end{cases}$.

Proprietățile modulului numerelor reale:

a) $|a| \geq 0$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$;

b) $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$;

c) $|-a| = |a|$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$;

d) $|ab| = |a| \cdot |b|$, $a, b \in \mathbb{R}$;

e) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $\forall\, b \in \mathbb{R}^*$;

f) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (cu „=” dacă $a, b \leq 0$ sau $a, b \geq 0$);

g) $|x| \leq a$, cu $a > 0 \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$;

h) $\sqrt{a^2} = |a|$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$;

i) $|x| \geq a$, cu $a > 0 \Leftrightarrow x \geq a$ sau $x \leq -a$.

D. Operații cu numere reale

I. Proprietățile adunării numerelor reale:

a) *asociativitatea:* $(a + b) + c = a + (b + c)$, $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$;

b) *comutativitatea:* $a + b = b + a$, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$;

c) *elementul neutru (nul):* $a + 0 = 0 + a = a$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$;

d) *elementul opus:* pentru orice $a \in \mathbb{R}$, există $(-a) \in \mathbb{R}$ astfel încât:

$$a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

II. Proprietățile înmulțirii numerelor reale:

a) *asociativitatea:* $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$;

b) *comutativitatea:* $a \cdot b = b \cdot a$, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$;

c) *elementul unitate:* există elementul $1 \in \mathbb{R}$ astfel încât $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$;

d) *elementul invers:* pentru orice $a \in \mathbb{R}^*$, există $\dfrac{1}{a}$ (sau a^{-1}) $\in \mathbb{R}$ astfel încât:

$a \cdot \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{a} \cdot a = 1$.

Definim **diferența** dintre a și $b \in \mathbb{R}$ astfel: $a - b = a + (-b)$.

Definim **împărțirea** lui $a \in \mathbb{R}$ la $b \in \mathbb{R}^*$ astfel: $a : b = a \cdot \dfrac{1}{b}$.

Avem următoarele **proprietăți**:

a) *distributivitatea înmulțirii față de adunare și scădere:* $a \cdot (b \pm c) = ab \pm ac$;

b) *regula semnelor:* $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(ab)$; $(-a) \cdot (-b) = ab$.

III. Puterile cu exponent întreg sunt definite astfel: dacă $a \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factori}}$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a^0 = 1$, $0^n = 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a^1 = a$, $a \in \mathbb{R}$.

Proprietățile ridicării la putere:

Fie $a, b \in \mathbb{R}^*$, $m, n \in \mathbb{Z}$. Atunci avem:

a) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; b) $a^m : a^n = a^{m-n}$; c) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$;
d) $a^m \cdot b^m = (ab)^m$; e) $a^m : b^m = (a : b)^m$.

IV. Definiție. Radicalul (de ordinul 2) (sau rădăcina pătrată) a numărului real $a \geq 0$ este numărul $x > 0$ cu proprietatea $x^2 = a$. Notăm $x = \sqrt{a}$.

Proprietățile rădăcinii pătrate:

a) $\sqrt{a^2} = |a|$, $\forall\ a \in \mathbb{R}$; b) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$, $a > 0$, $b \geq 0$;

c) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $a \geq 0$, $b > 0$; d) $\sqrt{a^n} = \left(\sqrt{a}\right)^n$, $a > 0$, $n \in \mathbb{Z}$;

e) $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$ pentru $a \geq 0$, $b > 0$;

f) $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$, pentru $a^2 \geq b \geq 0$, $a \geq 0$ (formula radicalilor dubli (compuşi).

E. Valoarea maximă şi valoarea minimă a numerelor a şi b:

$$\max(a,b) = \begin{cases} a, & a \geq b \\ b, & a \leq b \end{cases} = \frac{a + b + |a - b|}{2}; \qquad \min(a,b) = \begin{cases} a, & a \leq b \\ b, & b \leq a \end{cases} = \frac{a + b - |a - b|}{2}$$

Media aritmetică a numerelor reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, este:

$$m_a = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Media aritmetică ponderată a numerelor $a_1, a_2, \ldots, a_n$ cu ponderile $p_1, p_2, \ldots, p_n > 0$ este $m_p = \frac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + \ldots + a_n p_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}$.

Mediile armonică, geometrică (proporțională), pătratică ale numerelor $a > 0$, $b > 0$ sunt: $m_{arm} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a + b}$; $m_g = \sqrt{ab}$; $m_p = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.

Teoremă (inegalitatea mediilor). Pentru orice $a > 0$, $b > 0$, $a \leq b$, avem:

$$a \leq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a + b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \leq b;$$

$\min(a,b) \leq m_{arm} \leq m_g \leq m_a \leq m_p \leq b$ (cu „=” pentru $a = b$).

Probleme propuse

A.

*

1. Dați câte trei exemple de fracții echivalente cu:

a) $\frac{2}{3}$; b) $\frac{-3}{5}$.

2. Determinați numerele întregi n pentru care:

a) $\frac{13}{2n-1} \in \mathbb{Z}$; b) $\frac{-11}{3n-1} \in \mathbb{Z}$; c) $\frac{6}{3n-2} \in \mathbb{Q}-\mathbb{Z}$; d) $\frac{11}{3n-1} \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$.

3. Scrieți numărul 8 ca:

a) suma a trei numere întregi; b) produsul a trei numere naturale;

c) produsul a patru numere din $\mathbb{Z}-\mathbb{N}$; d) produsul a două numere din $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$.

4. Demonstrați că există două cifre a pentru care:

a) $\sqrt{5n+a} \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$; b) $\sqrt{5n+\overline{1a}} \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

5. Transformați în fracții zecimale numerele raționale:

a) $\frac{4}{125}$; b) $\frac{6}{72}$; c) $\frac{-25}{8}$; d) $\frac{16}{35}$; e) $\frac{21}{20}$; f) $1\frac{17}{60}$.

6. Transformați în fracții ordinare numerele:

a) –2,(3); b) 3,(20); c) 2,(213); d) 2,21(3); e) –3,32(10).

7. Ordonați crescător numerele:

a) 1,(23); 1,23; 1,2(3); 1,23(4); 1,23(2);

b) –2,1(4); –2,15; –2,145; –2,14(3); –2,14(5).

8. Demonstrați că următoarele numere sunt iraționale:

a) $\sqrt{3}$; b) $2\sqrt{5}$; c) $\sqrt{3}+2$; d) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$; e) $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$; f) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$.

**

9. Demonstrați că o fracție zecimală este finită dacă și numai dacă este de forma $\frac{a}{2^m \cdot 5^n}$, $a \in \mathbb{Z}$, $m, n \in \mathbb{N}$.

10. Demonstrați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, următoarele numere sunt iraționale:

a) $\sqrt{5n+8}$; b) $\sqrt{10n+7}$; c) $\sqrt{4n+2}$; d) $\sqrt{4n+3}$; e) $\sqrt{n^2+n}$.

11. Demonstrați că $A \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$, unde $A = 0{,}122333444\ldots\underbrace{nn\ldots n}_{\text{de } n \text{ ori}}\ldots$.

12. Fie $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, n și p numere prime. Demonstrați că:

a) $a\sqrt{p}+b=0 \Leftrightarrow a = b = 0$;

b) $a\sqrt{p}+b=c\sqrt{p}+d \Leftrightarrow a = c, b = d$;

c) $a\sqrt{n}+b\sqrt{p} = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$.

13. Demonstrați că:

a) $x \in \mathbb{N},\ \sqrt{x} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{x} \in \mathbb{N}$;

b) $x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N},\ \sqrt{x}+\sqrt{y} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{x} \in \mathbb{N},\ \sqrt{y} \in \mathbb{N}$.

14. Determinați mulțimea $A=\left\{n \in \mathbb{N} \,\middle|\, \dfrac{119^{n+1} \cdot 85^{n+2}}{49^{n} \cdot 289^{n+1}} \in \mathbb{N}\right\}$.

15. a) Determinați $n \in \mathbb{N}$, dacă fracțiile $\dfrac{n+4}{n+7}$ și $\dfrac{n+6}{n+10}$ nu sunt echivalente.

b) Există $x, y \in \mathbb{N}$ astfel încât $x^3 + y^3 = 3x + 5y + 2021$?

16. Fie fracția ireductibilă $\dfrac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}^*$, $p < q$. Demonstrați că fracția $\dfrac{q-p}{p}$ este ireductibilă.

17. Determinați numerele prime p pentru care $p + 2$, $p + 4$, $p^2 + 2$ și $p^2 + 4$ sunt numere prime.

18. Fie $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a_2^2 = a_1a_3,\ a_3^2 = a_2a_4,\ a_4^2 = a_3a_5,\ a_5^2 = a_4a_1$. Demonstrați că $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5$.

***

19. Fie $a, b \in \mathbb{Q}^*$ astfel încât $a^3 + b^3 = 2ab$. Demonstrați că $1 - ab$ este pătratul unui număr rațional.

20. Demonstrați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, avem $A_n \in \mathbb{Q}$, unde:

$$A_n=\frac{1+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}+\frac{1-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}+\frac{2+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}+\frac{2-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}+\ldots+\frac{n+\sqrt{2n+1}}{n+1-\sqrt{2n+1}}+\frac{n-\sqrt{2n+1}}{n+1+\sqrt{2n+1}}.$$

21. Determinați numerele prime a, b, c, d astfel încât $2a + 3b + 4c + 24d = 282$.

22. Fie $x, y \in \mathbb{Z}$. Demonstrați că $23 \mid 2x + 3y \Leftrightarrow 23 \mid 9x + 2y$.

23. Determinați $A=\left\{n \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \dfrac{n^2+2}{n+2} \in \mathbb{Z}\right\}$.

24. Demonstrați că fracția F_1 este ireductibilă, iar F_2 este reductibilă, unde:

$$F_1=\frac{2n^2+3n+1}{5n^2+6n+2},\quad F_2=\frac{5n^2+5n+4}{3n^4+3n^2+6},\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

25. a) Demonstrați că fracția $F=\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 2000+1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 2001+1}$ este ireductibilă.

b) Generalizare.

B.

*

26. Scrieți aproximările zecimale prin lipsă și prin adaos mai mici decât 10^0, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3} pentru numerele $a = 2,(7)$, $b = -3,(6)$, $c = \sqrt{2}$, $d = -\sqrt{2}$, $e = \sqrt{5}$, $f = -\sqrt{5}$.

27. Comparați numerele:

a) $\sqrt{n+5}$ și $\sqrt{2n+1}$; b) $2\sqrt{3}$ și $3\sqrt{2}$; c) $1+\sqrt{n+3}$ și $2+\sqrt{n+1}$.

28. Comparați numerele:

a) $\sqrt{2}+\sqrt{7}$ și $\sqrt{3}+\sqrt{4}$; b) $\sqrt{13}-\sqrt{7}$ și $\sqrt{11}-\sqrt{5}$.

29. Demonstrați că:

a) $\frac{1}{2}<\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+...+\frac{1}{19}<1$; b) $\frac{1}{10}<\frac{1}{90}+\frac{1}{91}+...+\frac{1}{99}<\frac{1}{9}$;

c) $\frac{2}{5}<\frac{5}{2\cdot 7}+\frac{10}{7\cdot 17}+\frac{15}{17\cdot 32}+\frac{18}{32\cdot 50}<\frac{3}{5}$.

30. Demonstrați că numărul $\sqrt{n^2+n+1} \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$.

**

31. Demonstrați că numărul $\sqrt{n^2+3n+3} \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

32. Determinați $a, b, c \in \mathbb{Z}$, știind că: I. $abc < 0$; II. $|a| = b + 2 \geq 3b$; III. $a + b + c = 2$.

33. Ordonați numerele a, b, c, știind că $a^2 + b^2 + c^2 + 34{,}5 = 5a + 11b - c$.

34. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ cu $a + b + c = 1$. Determinați $\min(a^2 + b^2 + c^2)$.

35. Fie a, b, c cifre nenule distincte și $x=\frac{a}{10}+\frac{b}{100}$, $y=\frac{b}{10}+\frac{c}{100}$, $z=\frac{c}{10}+\frac{a}{100}$ și $A = x + y + z$. Determinați:

a) $\min A$ și $\max A$;

b) cel mai mic număr $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $nA \in \mathbb{N}^*$ și $a + b + c = 12$.

***

36. Demonstrați că dacă $x, y \in \mathbb{R}$, $x^2 + y^2 - 2x + 14y + 46 = 0$, atunci $x > y$.

37. Fie $a=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $b=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Demonstrați că $a^n + b^n > 2$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$

38. Demonstrați că, dacă $x, y \in \mathbb{R}$, $[x] = [y]$, atunci $|x - y| < 1$.

39. Demonstrați că, dacă $x, y \in \mathbb{R}$, atunci $\{x\} = \{y\} \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$.

40. Demonstrați că, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem:

a) $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]$; b) $[x]+\left[x+\frac{1}{3}\right]+\left[x+\frac{2}{3}\right]=[3x]$ (identitatea lui Hermite).

41. Calculați partea întreagă a numerelor:

a) $\sqrt{n^2+2n}$; b) $\sqrt{n^2+4n}$; c) $\sqrt{4n^2+n}$; d) $\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)^2$.

42. Rezolvați următoarele ecuații:

a) $\left[\frac{x-3}{3}\right]=\frac{x+1}{4}$; b) $\left[\frac{2x+1}{3}\right]=\frac{2x-1}{2}$; c) $\left[\frac{3x-1}{2}\right]=\frac{3x+1}{2}$;